Условие:

Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

$y'' + 2y' - 3y = 5e^{2x}$.

Решение:

Это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами $\Rightarrow$ сначала решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + 2y' - 3y = 0$. Его характеристическое уравнение будет $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3 \Rightarrow$ общее решение однородного уравнения будет:

$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}$.

Теперь так-как правая часть исходного уравнения имеет вид $5e^{2x}$, причём 2 не является корнем характеристического уравнения $\Rightarrow$ частное решение исходного уравнения ищем в виде

$y_2 = ae^{2x} \Rightarrow y_2' = 2ae^{2x}, y_2'' = 4ae^{2x} \Rightarrow y_2'' + 2y_2' - 3y_2 = 5ae^{2x} = 5e^{2x} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow y_2 = e^{2x}$

$\Rightarrow$ искомое общее решение исходного уравнения будет:

$y = y_1 + y_2 \Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} + \mathrm{e}^{2x}}$.